16 場合の数，順列

117

(1)

男子の並び方×男子グループと女子 6 人の並び方より，$3!\cdot 7!=30240$ 通り

(2)

両端の男子の並び方×のこり 7 人の並び方より，${}_3\mathrm{P}_2\cdot 7!=30240$ 通り

(3)

女子 6 人の円順列×女子の間への男子の入り方より，$(6-1)!\cdot{}_6\mathrm{P}_3=14400$ 通り

補足

各女子は，場合の数の約束上，区別されるので，各女子間も区別される。

したがって，どの女子と女子の間を選ぶかで男子の入り方は ${}_6\mathrm{P}_3$ 通り。

118

(1)

2 の倍数の個数

一の位の数は $2,\ 4,\ 6$ のいずれかであればよいから，$3\cdot{}_5\mathrm{P}_4=360$

3 の倍数の個数

各位の数の和が 3 の倍数，

すなわち各位の数を 3 で割った余りの和が 3 の倍数であればよい。

そこで，$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ のそれぞれを，3 で割った余りでグループ分けすると，

余りが -1 の組は $(2,\ 5)$，余りが 0 の組は $(3,\ 6)$，余りが 1 の組は $(1,\ 4)$

よって，各位の数の余りの和が 0 になるための組合せは $(2,\ 5,\ 3,\ 1,\ 4),\ (2,\ 5,\ 6,\ 1,\ 4)$

ゆえに，3 の倍数の個数は $2\cdot 5!=240$

(2)

3 の倍数かつ 2 の倍数だから，3 の倍数となる組合せ $(2,\ 5,\ 3,\ 1,\ 4),\ (2,\ 5,\ 6,\ 1,\ 4)$ で，

一の位が偶数となる 5 桁の整数の個数を求めればよい。よって，$2\cdot 4!+3\cdot 4!=120$

(3)

$30=2\cdot 3\cdot 55$ より，2 でも 3 でも 5 でも割り切れない整数の個数を求めればよい。

2 の倍数の集合を A，3 の倍数の集合を B，5 の倍数の集合を C とすると，

$n(A)=360$，$n(B)=240$，$n(C)=1\cdot{}_5\mathrm{P}_4=120$

$n(A\cap B)=120$，$n(B\cap C)=1\cdot 4!+1\cdot 4!=48$（3 の倍数のうち，一の位の数が 5），

$n(C\cap A)=0$（一の位の数が 0），$n(A\cap B\cap C)=0$（一の位の数が 0）

よって，

$$
\begin{aligned}
n(\overline{A\cup B\cup C})&=n(U)-n(A\cup B\cup C)\\
&={}_6\mathrm{P}_5-(n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C))\\
&=720-(360+240+120-120-48-0+0)\\
&=168
\end{aligned}
$$

119

(1)

12 の倍数の個数

$864 = 2^5 \cdot 3^3 = (2^2 \cdot 3^1) \cdot 2^3 \cdot 3^2$ より，$(3+1)(2+1) = 12$

18 の倍数の個数

$864 = 2^5 \cdot 3^3 = (2^1 \cdot 3^2) \cdot 2^4 \cdot 3^1$ より，$(4+1)(1+1) = 10$

12 の倍数かつ 18 の倍数　すなわち 36 の倍数

$864 = 2^5 \cdot 3^3 = (2^2 \cdot 3^2) \cdot 2^3 \cdot 3^1$ より，$(3+1)(1+1) = 8$

よって，12 の倍数または 18 の倍数であるものの個数は $12 + 10 - 8 = 14$

12 の倍数の総和＝$12(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1 + 3^2) = 12 \cdot 15 \cdot 13 = 2340$

18 の倍数の総和＝$18(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(3^0 + 3^1) = 18 \cdot 31 \cdot 4 = 2232$

36 の倍数の総和＝$36(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1) = 36 \cdot 15 \cdot 4 = 2160$

よって，求める総和＝ $2340 + 2232 - 2160 = 2412$

(2)

$a + b + c = 9$，$a \geq b \geq c \geq 1$ とし，$(a+1)(b+1)(c+1)$ の値を求めると，

a	b	c	$(a+1)(b+1)(c+1)$
7	1	1	32
6	2	1	42
5	3	1	48
5	2	2	54
4	4	1	50
4	3	2	60
3	3	3	64

よって，$l = m = n = 3$ で，正の約数は最大個数 64 をとる。

120

(1)

略

(2)

解法 1

最高位の数の選び方は 1～9 の 9 通り。

最高位の数を a とすると，もう 1 つの数の選び方は a を除く 9 通り。

そこで，もう 1 つの数を b とすると，最高位以外の $n-1$ 個の各位の数は a か b かだから，

その順列の数は 2^{n-1} であるが，2 種類の数字から成り立っていなければならないことから，

a のみの場合は除かれる。よって，$2^{n-1} - 1$。

ゆえに，$9 \cdot 9(2^{n-1} - 1)$　すなわち $81(2^{n-1} - 1)$

解法 2

(i) 0 を含む場合の個数

0 との組合せの数は 9

最高位以外の $n-1$ 個の位のうち k 個に 0 が入るとすると，その入り方の数は ${}_{n-1}\mathrm{C}_k$ で，

k については，2 種類の数字から成り立っていなければならないという条件より，

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-2$

よって，0 を含む場合の個数は

$$9\sum_{k=0}^{n-2}{}_{n-1}\mathrm{C}_k=9\left(\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k-{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}\right)$$
$$=9\left(2^{n-1}-1\right)$$

(ii) 0 を含まない場合の個数

2 数の組合せの数は ${}_9\mathrm{C}_2=36$

n 個の位のうち k 個に一方の数が入るとすると，その入り方の数は ${}_n\mathrm{C}_k$ で，

k については，2 種類の数字から成り立っていなければならないという条件より，

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$

よって，0 を含まない場合の個数は

$$36\sum_{k=1}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_k=36\left(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k-{}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_n\right)$$
$$=36\left(2^n-2\right)$$
$$=72\left(2^{n-1}-1\right)$$

(i)，(ii)より，求める個数は $9\left(2^{n-1}-1\right)+72\left(2^{n-1}-1\right)=81\left(2^{n-1}-1\right)$

121

(1)

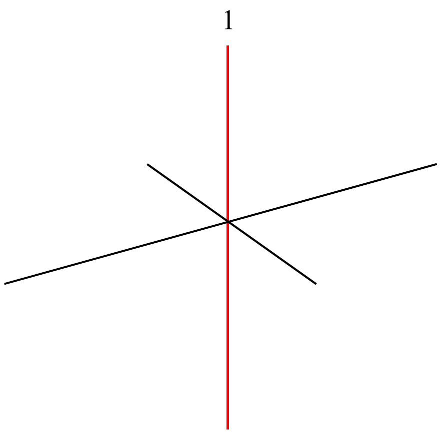
正八面体の向かい合う頂点を線分で結ぶと下図のようになる。

頂点 1 と向かい合う頂点の選び方は 5 通り　・・・①

次に，頂点 1 を固定し，頂点 1 を含む線分を軸とすると，

その軸周りの頂点は円順列となるから，その数は $3!$ 通り　・・・②

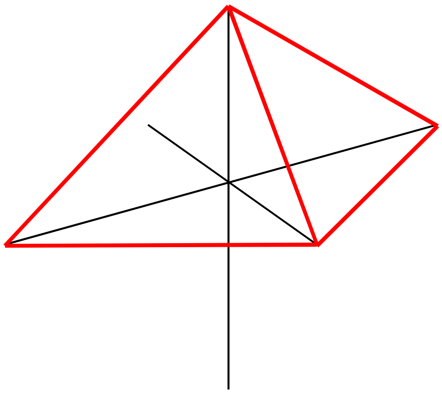
よって，①と②より，$5\cdot 3!=30$ 通り



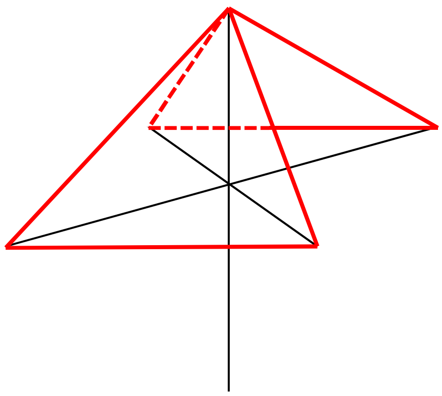
(2)

赤色の塗り分け方は，以下の 3 通り。

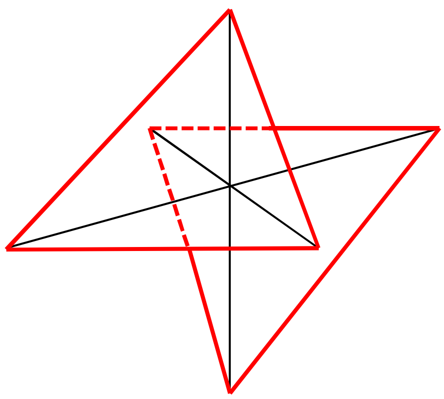
辺を共有する場合



辺を共有せず頂点を共有する場合



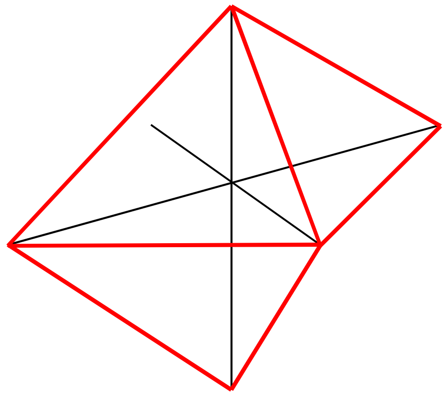
辺も頂点も共有しない場合



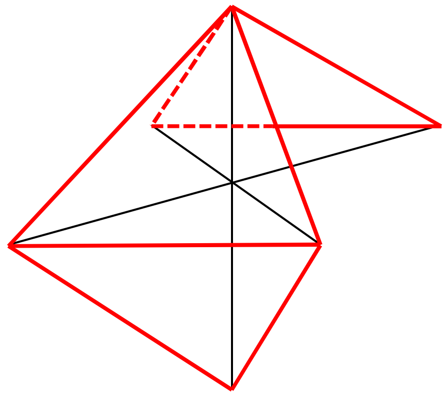
(3)

(2)の 2 面の塗り分け方より，以下の 3 通り。

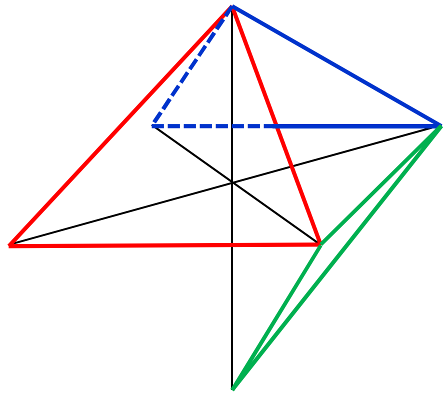
どの面も辺を共有する場合



2 面が辺を共有し，その 2 面のうちの 1 面が残りの面と頂点を共有する場合



どの面も辺を共有せず，頂点を共有する場合



122

(1)

a_4

(i) 3 段目から 4 段目に上る場合

$a_3 \times 1 = 4$ 通り ・・・①

(ii) 2 段目から 4 段目に上る場合

3 段目を経ての上り方は(i)に含まれる。

したがって，(i)と重複しないのは，2 段目から直接 4 段目に達する場合である。

よって，$a_2 \times 1 = 2$ ・・・②

(iii) 1 段目から 4 段目に上る場合

2 段目または 3 段目を経て 4 段目に上る方法は，(i)または(ii)に含まれる。

したがって，(i)，(ii)と重複しないのは，1 段目から直接 4 段目に達する場合である。

よって，$a_1 \times 1 = 1$ ・・・③

(iv) 0 段目から 4 段目に上る場合

1 段目または 2 段目または 3 段目を経る必要がある。

したがって，すべての上り方は(i)～(iii)のいずれかに含まれる。

以上より，$a_4 = a_3 \times 1 + a_2 \times 1 + a_1 \times 1 = 4 + 2 + 1 = 7$

a_5

a_4 の場合と同様に考えて，$a_5 = a_4 + a_3 + a_2 = 7 + 4 + 2 = 13$

(2)

(1)で示した考え方により，$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$

(3)

$a_6 = a_5 + a_4 + a_3 = 13 + 7 + 4 = 24$

$a_7 = a_6 + a_5 + a_4 = 24 + 13 + 7 = 44$

$a_8 = a_7 + a_6 + a_5 = 44 + 24 + 13 = 81$

$a_9 = a_8 + a_7 + a_6 = 81 + 44 + 24 = 149$

よって，$a_{10} = a_9 + a_8 + a_7 = 149 + 81 + 44 = 274$

123

(1)

条件より，$(0,\ 9),\ (1,\ 8),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5)$の各組の 2 数のうち，どちらか 1 つが各桁の数として可能である。

千の位，百の位，十の位，一の位の順に選んでいくと，

千の位の数は 0 を除く 9 通り，百の位の数千の位で選んだ組の数を除く 8 つの数から 1 つ選べばよいから 8 通り，同様にして，十の位の数は 6 通り，一の位の数は 4 通り。

よって，$9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 = 1728$ 通り。ゆえに，1728 個

(2)

1 桁の数は 9 個，2 桁の数は$9 \cdot 8 = 72$ 個，3 桁の数は$9 \cdot 8 \cdot 6 = 432$ 個

よって，3 桁以下の数は$9 + 72 + 432 = 513$ 個

ゆえに，4 桁の数で小さい方から数えて$2000 - 513 = 1487$ 番目の数である。

千の位を固定したときの 4 桁の整数の数は$8 \cdot 6 \cdot 4 = 192$，

千と百の位の数を固定したときの 4 桁の整数の数は$6 \cdot 4 = 24$、

千，百，十の位の数を固定したときの 4 桁の整数の数は 4

よって，$1487 = 192 \cdot 7 + 24 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 3$ より，

千の位の数は 0 を除いて小さい順から 8 番目の数，すなわち 8，

百の位の数は$(0,\ 9),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5)$の小さい順から 6 番目の数，すなわち 6

十の位の数は$(0,\ 9),\ (2,\ 7),\ (4,\ 5)$の小さい順から 6 番目の数，すなわち 9

一の位の数は$(2,\ 7),\ (4,\ 5)$の小さい順から 3 番目の数，すなわち 5

よって，求める数は 8695